EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO COMO ARTICULADOR ENTRE LOS MODOS SGC Y AO DE LA DERIVADA EN LO LOCAL

Irma Pinto Rojas[1], Marcela Parraguez González[2]
Universidad Católica del Norte[1], Pontificia Universidad Católica de Valparaíso[2]

Resumen: Desde un estudio histórico y epistemológico se sustentan los modos de pensar la derivada con base en un referente teórico análogo a los Modos de Pensamiento de Anna Sierpinska, de donde emerge un modelo sistémico para la comprensión de ella. Desde una perspectiva local de la derivada, las componentes de este modelo se han definido como: Los modos Sintético-Geométrico-Convergente (SGC), Analítico-Operacional (AO) y Analítico-Estructural (AE) de la derivada, cuya comprensión será entendida como la capacidad del aprendiz para articular los modos definidos. Se presenta en esta comunicación, el triángulo rectángulo como un elemento geométrico que permite articular los modos SGC y AO, validado con evidencia empírica a través de una entrevista en profundidad a un matemático docente e investigador.

Modos de pensamiento, modelo sistémico, articulador, comprensión, derivada

INTRODUCCIÓN

El aspecto local y global de la derivada se fue manifestando en un entorno científico de más de 200 años de evolución, (Bourbaki, 1972). Desde un análisis histórico y epistemológico, Grabiner (1981), muestra que el concepto de derivada primero fue usado, después fue descubierto, investigado y finalmente definido, un proceso complejo donde se evidencian las distintas etapas y perspectivas que han permitido el desarrollo del cálculo diferencial, en este sentido las etapas consideradas en la investigación de Grabiner (1981), se han dividido en: (1) la génesis de la derivada, (2) la derivada en la época medieval e inicios de la edad moderna, (3) la búsqueda del rigor y la formalización matemática de la derivada.

La formalización de lo infinitamente pequeño establece una crisis paradigmática en los matemáticos entre los siglo XVII-XIX, el rigor matemático pone en conflicto los argumentos defendidos en torno a la justificación matemática de la existencia de límite, el "nudo teórico" usado de manera intuitiva, el cociente de diferencias no tenía la consistencia matemática, se necesitaba la continuidad, la convergencia y la justificación consistente de este cociente que se aproxima a cero, la interpretación intuitiva de un número infinitamente pequeño como una variable que tiende a cero, es una concepción instrumental defendida por matemáticos del siglo XVII, cuya razón de ser consistió en el estudio de las funciones y sus derivadas para resolver problemas de fenómenos de la física, geometría y la mecánica. Estas aplicaciones de la derivada brindaban resultados que mostraban grandes logros en el avance científico, (Grabiner 1981), sin embargo no estaba resuelto el problema de "lo infinitamente pequeño". El Cálculo infinitesimal dio por primera vez un tratamiento claro y potente de la derivada en lo local en 1823, cuando Cauchy tomó el viejo concepto de cociente diferencial, y le dio un nuevo significado, desde donde emerge una visión local de la derivada, cuya consistencia está dada por la definición épsilon –delta del límite. En el área de la didáctica de la matemática, las investigaciones reportan la existencia de dificultades asociadas a la comprensión del límite, considerado como un obstáculo epistemológico, (Sierpinska 1985) y son variadas las perspectivas teóricas que consideran la derivada como principal objeto de estudio, de acuerdo con Sanchez-Matamoros, García y Llinares (2008), se abren caminos para investigar la relación entre los aspectos tanto global (función derivada) como el aspecto local (derivada en un punto), tal relación podría ser determinante en la superación de las dificultades en relación a la comprensión de la derivada. Es de interés para esta investigación indagar en la comprensión de la derivada en lo local, con base en un modelo sistémico cuyas componentes están organizadas de tal forma que pueden interactuar y relacionarse, para explicar e interpretar la comprensión que un sujeto muestra para la comprensión de la derivada. Tomando como referente el marco teórico "*Los Modos de Pensamiento*" desarrollado por Sierpinska para el Álgebra Lineal, (Sierpinska 2000), se levantaron tres modos de pensar la derivada, en lo local, que son las componentes que definen al modelo y explican la comprensión del concepto en estudio. Esta comprensión se entenderá como la capacidad que tiene un sujeto para articular los tres modos de pensar que conforman el modelo. El propósito de este escrito es mostrar un elemento articulador entre dos de estos modos de pensar la derivada, junto con una técnica de recogida de datos, que permite la validación del articulador a través de una entrevista en profundidad.

MARCO DE REFERENCIA. LOS MODOS DE PENSAR LA DERIVADA EN LO LOCAL

Este marco de referencia corresponde a un modelo sistémico para la comprensión de la derivada, que relaciona el aspecto local y global de la derivada y sus modos de comprensión respectivamente, modelo que ha sido el resultado de la evolución de una investigación para los Modos de Pensar la derivada, iniciada como una variación del marco teórico Los Modos de Pensamiento de Anna Sierpinska, reportado en, Pinto y Parraguez (2015).

Modo Sintético-Gráfico-Convergente (SGC)

El contexto geométrico de la derivada como la pendiente de la recta tangente en el análisis histórico y epistemológico, (Bourbaki 1972), muestra la diversidad de puntos de vista sobre la noción de recta tangente, así también la recta tangente es la noción matemática que esta investigación considera como una componente fundamental para conseguir la imagen directa, observable del concepto de derivada, característica que Sierpinska, (2000) da al pensamiento practico del modo Sintético- Geométrico (SG). (Figura 1).

De acuerdo con Canul, E.; Dolores, C y Martínez-Sierra, G. (2011), una concepción geométrica global de la tangente, en la definición de Euclides, refiere a la tangente de una circunferencia, como*: Una línea recta es tangente a una curva cuando tenga un punto en común con la curva, no se puede pasar por este punto ninguna recta entre ella y la curva*. Sin embargo, para el propósito de construir rectas tangentes a la curva en esta investigación, esta definición presenta dificultad en la comprensión, dado que la curva con puntos de inflexión no tendría posibilidad de tangente, la concepción euclidiana se torna inadecuada, (Canul et al. 2011). Es necesario entonces considerar una definición de tangencia que suponga la tangencia desde lo local. En esta perspectiva, se considera entonces, para poder trazar tangentes a estas nuevas curvas, el punto de vista desarrollado por D´Alembert (1717-

1783), para el logro de la representación del concepto de derivada por medio de la tangente que concuerda con la definición propuesta por Leibniz.

Modo Analítico -Operacional (AO)

Para definir la derivada en términos de la definición de límite, Cauchy considera el límite de la relación de las diferencias [*f (x + i) – f (x)*] / *i* en un intervalo de continuidad de *f* (x). Se necesita de la continuidad para *f (x + i) – f (x)* e i puedan tanto "acercarse indefinidamente y al mismo tiempo el límite cero", o lo que es equivalente, "cantidades infinitamente pequeñas." Cauchy nunca indica explícitamente esto como un teorema, cada función diferenciable debe ser continua. Como lo habían hecho muchos de sus predecesores, que aunque el numerador y el denominador de la razón *f* (x + i) – *f* (x) / i es cero ", la relación en sí misma puede converger a otro límite, ya sea positiva o negativa", que cuando existe, tiene un valor definido para cada valor particular de x, para indicar esta dependencia, se da a la nueva función el nombre de la función derivada y se designa con la ayuda de un acento por la notación *y*' o *f' (x)*; la frase "este límite, cuando existe" ejemplifica la actitud rigurosa de Cauchy. Tal vez la calificación "cuando el límite existe" sólo estuvo motivada por el comportamiento de las funciones conocidas en puntos aislados, pero su lenguaje era lo suficientemente general para abrir toda la cuestión de la existencia o no existencia de derivadas, (ver Figura 1).

Modo Analítico - Estructural (AE)

Los modos de pensamiento son formas de ver y entender los objetos matemáticos y dependen de los tipos de relaciones y de los objetos evocados por el sujeto en el momento de resolver una tarea, (Parraguez 2012), por tal razón este modo considera los indicadores y las propiedades que caracteriza a la pendiente en relación con la recta tangente y la curva (ver Figura 1).

Se presentan tres modos que permiten describir la comprensión de la derivada en lo local:

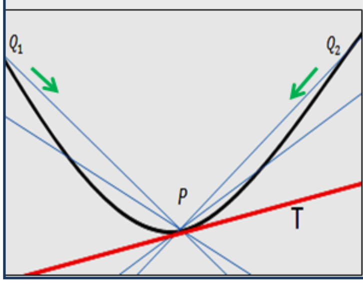
Sintético-Geométrico-Convergente SGC	Analítico-Operacional AO	Analítico-Estructural AE
	• $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ • Si este límite existe en x_0 $m = f'(x_0)$. Donde m es el límite de las pendientes de las rectas secantes a f desde P	• Recta tangente a la curva en P • Indicadores que dan consistencia a la pendiente de la recta tangente a la curva en P

Fig. 1. Sintético-Geométrico -Convergente (SGC), el Modo Analítico-Operacional(AO) y el Modo Analítico-Estructural (AE) del concepto de derivada.

Para comprender la derivada en lo local, se deben articular los tres modos presentados en Figura 1, describir y validar dichos elementos es el propósito de esta investigación. En la Figura 2, se muestra el diagrama que guiara la búsqueda, para ello se plantea la siguiente pregunta ¿cuáles son los elementos articuladores entre los aspectos Sintético-Geométrico-

Convergente, Analítico-Operacional y Analítico-Estructural, que permiten la comprensión del concepto de derivada?

Diagrama que representa la búsqueda de articuladores

Fig. 2. La relación de los articuladores con los modos definidos

INSTRUMENTOS

Esta comunicación muestra un elemento articulador entre el modo SGC y AO, junto con la evidencia empírica, con un instrumento centrado en una entrevista en profundidad a un investigador y profesor de una universidad chilena. La transcripción de la entrevista por episodios, da cuenta del triángulo rectángulo declarado como un articulador entre el modo SGC y AO de la derivada. Se debe resaltar que los modos de la Figura 1, fueron mostrados en tarjetas sin rótulos y nombrados como aspecto 1, 2 y 3 de la derivada, para no influir en las respuestas del informante. En lo que sigue se muestra partes de dicha entrevista.

[1ENT]: ¿Qué elementos de la matemática, piensa usted que relacionan estos aspectos de la derivada?

[2PM1] Primero es que usted puede fijar el *f(x)* del punto *P* y puede decir que *f(x+h)* es el extremo del triángulo, en conexión con el punto *Q*, o puede ser mirando cualquier punto del otro lado, a la izquierda o derecha de *P*. Con relación al cociente, usted, tiene un triángulo, con eso estamos pensando en el límite, con relación al cociente, usted, tiene un triángulo y con eso relaciono, el valor de *h* que es lo que define el cateto del triángulo.

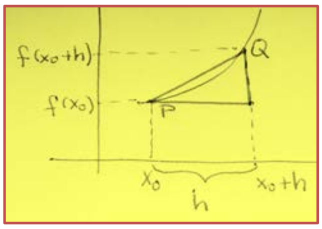


Fig. 3. Articulador del modo SGC y AO

El ángulo de tangencia da exactamente la pendiente de la recta tangente, cuando *h* tiende a cero. Para mí el concepto que hace la ligazón entre los dos es perfectamente el triángulo rectángulo, porque estoy usando implícitamente que el ángulo está formado entre dos catetos del triángulo.

REFLEXIONES

El triángulo rectángulo (Figura 3), es el elemento geométrico que articula el modo SGC y AO desde la perspectiva local de la derivada y se corresponde con el triángulo característico de la perspectiva leibiziana, la curva como una poligonal de lados infinitesimales.

Referencias

Bourbaki, N. (1972). *Elementos de la historia de las matemáticas.* España: Alianza Editorial.

Canul, E.; Dolores, C. y Martínez-Sierra, G. (2011). De la concepción global a la concepción local. El caso de la recta tangente en el marco de la convención matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 14(2), 173-202.

Grabiner, J. (1981). *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus.* Cambridge, Massachusetts and London. England: M.I.T. Press.

Parraguez, M. (2012). *Teoría los modos de pensamiento. Didáctica de la Matemática*. Valparaíso: Ediciones Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Pinto, I. y Parraguez, M. (2015). El concepto de derivada desde la teoría Los Modos de Pensamiento, sustentado en la epistemología de Cauchy. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* 28(1), 337-334.

Sánchez-Matamoros, G. ; García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en Didáctica de la Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 11(2), 267-296.

Sierpinska, A. (2000). On some Aspects of Student´s thinking in Linear Algebra. En *The Teaching of Linear Algebra in Question* (pp. 209-246). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistemologiques relatifs a la notion ded límite. *Recherches en Didactique des Mathematiques.* 6(1), 5-7.